TURUNAN

Defenisi 1:

Misalkan I adalah sebuah interval, misalkan f : I → R adalah sebuah fungsi, dan misalkan c∈I. Diasumsikan bahwa limit L: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ada. Maka f terdiferensialkan di c dan L adalah turunan dari f di c dan kita tulis f'(c) = L.

Contoh:

Tentukan turunan dari f(x) = x^2 dengan menggunakan definisi diatas!

Penyelesaian:

f(x) = x^2 untuk x ∈ R, maka ada c di R sehingga,

f'(c) = $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ = $\lim_{x \to c} \frac{x^2-c^2}{x-c}$ = $\lim_{x \to c}(x+c)$= 2c

Teorema 1:

Jika f: I → R mempunyai turunan di c ∈ I, maka f terdiferensialkan di c.

Bukti :

Untuk setiap x ∈ I, x ≠ c, maka

f(x) – f(c) $= \left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)$

$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right) \lim_{x \to c}(x-c)$

$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = f'(c).0$

$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = 0$

karenanya $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan f kontinu di c.

Teorema 2:

Misalkan I adalah sebuah interval, misalkan f : I → R dan g : I → R terdiferensialkan di c ∈ I, dan α ∈ R. Maka:

a. Didefinisikan h: I → R oleh h(x) = $\alpha f(x)$. Lalu h terdiferensialkan di c dan h'(c) =αf'(x).

Bukti:

Misalkan h(x) = $\alpha f(x)$. Untuk x ∈ I, x ≠ c, maka

$$.\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{\alpha f(x)-\alpha f(c)}{x-c}$$

$$= \alpha \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \alpha \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

b. Didefinisikan h: I → R oleh h(x) = $f(x) + g(x)$. Lalu h terdiferensialkan di c dan h'(c) = f'(c) + g'(c)

Bukti:

Didefinisikan h(x) = f(x) + g(x), untuk x ∈ I, x ≠ c, maka

$$.\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{f(x)+g(x))-(f(c)+g(c)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = f'(c) + g'(c)$$

c. Didefinisikan h: I → R oleh h(x) = $f(x)g(x)$. Lalu h terdiferensialkan di c dan h'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)

Bukti:

Misalkan h(x) = $f(x)g(x)$, untuk x ∈ I, x ≠ c, maka

$$.\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)-f(c)}{x-c} g(x) + \frac{g(c)-g(x)}{x-c} f(c)$$

$$\text{llim}_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

d. Didefinisikan h: I → R oleh h(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$. Lalu h terdiferensialkan di c dan $h'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$

Bukti:

$$.\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{f(x)/g(x)-f(c)/g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$= \frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(c)}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(c) - f(c)\frac{g(x)g(c)}{x-c}\right)$$

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{f^{'(c)}g(c)-f(c)g^{'}(c)}{g(c)^2}$$

Corollary:

Jika f_1, f_2, ...,f_n adalah fungsi pada interval I ke R yang terdiferensialkan di $c\epsilon I$, maka:

a. Fungsi $f_1 + f_2 + ... + f_n$ terdiferensialkan di c dan $(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(c) = f'_1(c) + f'_2(c) + ... + f'_n(c)$
b. Fungsi $f_1 f_2 ..... f_n$ terdiferensialkan di c dan $(f_1 f_2 .... f_n)'(c) = f'_1(c)f_2(c)...f_n(c) + f_1(c)f'_2(c)...f_n(c) + ... + f_1(c)f_2(c)...f'_n(c)$

Jika fungsi pada perkalian diatas (b) sama, yaitu $f_1 = f_2 = ... = f_n$ maka corolly (b) menjadi

$$(f^n)'(c) = n(f(c))^{n-1}f'(c)$$

Jika kita ambil f(x) = x lalu kita temukan turunan dari $g(x) = x^n$ menjadi $g'(x) = nx^{n-1}$, $n \in N$.

Notasi:

Jika $I \subseteq R$ adalah interval dan $f: I \to R$, kita kenalkan f' ke fungsi yang domainnya adalah himpunan dari I dan nilainya di titik c adalah turunan f'(c) dari f di c. Notasi lainnya pada waktu yang lain menggunakan f'. Untuk contoh, suatu waktu kita tulis Df untuk f'. Ketika x adalah "variabel yang terikat". Kita akan menulis notasinya df/dx untuk f'.

Chain Rule

Misalkan I_1,I_2 adalah interval, misalkan $g : I_1 \to I_2$ terdiferensial di $c \in I_2$, dan $f: I_2 \to R$ terdiferensialkan di g(c). Jika $h: I \to R$ didefinisikan oleh

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

lalu h terdiferensialkan di c dan

$$h'(c) = f^{'}(g(c))g^{'}(c)$$

Bukti:

Misalkan d = g(c). Didefinisikan

$$u(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(d)}{y-d} & jika\ y \neq d \\ f'(d) & jika\ y = d \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(c)}{y-c} & jika\ x \neq c \\ g'(c) & jika\ x = c \end{cases}$$

$\lim_{y\to d} u(y) = f'(d)$ dan $\lim_{y\to x} v(x) = g'(c)$(fungsi u dan v kontinu di d dan c). Sehingga

f(y) – f(d) = u(y)(y-d) dan g(x)-g(c) = v(x)(x-c)

we plug in to obtain

h(x) – h(c) = f(g(x) –f(g(c) = u(g(x))(g(x)-g(c)) = u(g(x))(v(x)(x-c)

sehingga,

.$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = u\big(g(x)\big)v(x)$

Kita notasikan bahwa $\lim_{x\to c} v(x) = g'(x)$, g kontinu di c, $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$. Dan akhirnya $\lim_{y\to g(c)} u(y) = f'(g(c))$. Lalu limit di sisi kanan ada dan sama ke f'(g(c))g'(x). Thus h terdiferensialkan di c dan limit nya f'(g(c)g'(c).

Contoh:

Tentukan turunan dari fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & untuk\ x \neq 0 \\ 0 & untuk\ x = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

D sin x = cos x, untuk semua x ∈ R, dan dengan mengaplikasikan sifat perkalian dan chain rule, maka

f'(x) = 2xsin(1/x) – cos(1/x) untuk $x \neq 0$

jika x = 0, maka turunan dari f di x=0 adalah

f'(0) = $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis 3*. New York: Jhon Wiley & Sons, inc

Lebl, Jiri. 2011. *Basic Analysis (Introduction to Real Analysis)*. California