ALJABAR BOOLE

DISUSUN OLEH

AMALIA NURJANNAH, S.Pd

DAFTAR ISI

ALJABAR BOOLE

I. Definisi Dasar Aljabar boole

Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operasi biner, $\wedge$ dan $\vee$, dan sebuah operasi binary, dinotasikan ‘; misalkan 0 dan 1 menyatakan dua elemen yang berbeda dari B. maka sextuplet

$$(B, \wedge, \vee, ‘, 0, 1)$$

disebut aljabar Boolean jika aksioma-aksioma berikut berlaku untuk setiap elemen x, y, z dari himpunan B:

1. Untuk setiap x dan y dalam B, (hukum kumutatif)
   $x \vee y = y \vee x$
   $x \wedge y = y \wedge x$
2. Untuk setiap x, y, dan z dalam B, (hukum distributif)
   $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
   $x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \vee z)$
3. Untuk setiap x dalam B,(hukum identitas)
   $x \vee 0 = x$
   $x \wedge 1 = x$
4. Untuk setiap x dalam B, (hukum negasi)
   $x \vee x' = 1$
   $x \wedge x' = 0$
5. Untuk setiap x, y, dan z dalam B, (hukumAsosiatif)
   $(x \vee y) \vee z = y \vee (x \vee z)$
   $(x \wedge y) \wedge z = y \wedge (x \wedge z)$

Contoh 1 :

Ada 2 elemen Aljabar boole : $B_0 = \langle \{Ø, \{Ø\}\}, \cap, \cup, Ø, \{Ø\} \rangle$ dimana jika hubungkan dengan symbol aljabar boole : $\langle B, \wedge, \vee, ‘, 0, 1 \rangle$ maka:

B = {Ø, {Ø}

$\wedge$ = operasi iontersection $\cap$ pada teori himpunan,

$\vee$ = operasi union $\cup$ pada toeri himpunan,

‘ = operasi komplemen pada teori himpunan,

0 = Ø,

1 = {Ø}

Jelaslah operaisi- operasi $\cap$, $\cup$ dan pada teori himpunan berlangsung pada {Ø, {Ø}}

Istilah- istilah :

a. x $\wedge$ y disebut pertemuan x dan y
b. x $\vee$ y disebut penggabungan x dan y
c. x’ disebut komplemen dari x
d. 0 disebut elemen nol
e. 1 disebut elemen unit

Untuk menbedakan istilah- istilah diatas dengan aljabar boole yng lain maka istilah di atas dinotasikan sebagai berikut : $\langle B, \wedge_B, \vee_B, ‘_B, 0_B, 1_B \rangle$ dengan demikian $\langle B, \wedge, \vee, ‘, 0, 1 \rangle$ adalah Aljabar Boole sembarang.

II. Dualitas dan Teorema - teorema

Dual dari B adalah pernyataan yang didapat dengan mengubah operasi - operasi $\wedge$ dan $\vee$, dan mengubah elemen identitas yang menghubungkan 0 dan 1, dalam pernyataan awal di B

Contoh 2 :

Tuliskan dual dari setiap persamaan Boolean :

a. $(x \wedge 1) \wedge (0 \vee x')$

b. $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$

Penyelesaian :

a. untuk mendapatkan persamaan dual, ubahlah $\vee$ dan $\wedge$, dan ubah 0 dan 1, sehingga

$$(x \vee 0) \vee (1 \wedge x') = 1$$

b. pertama tulis persamaan dengan $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$, sehiongga dualnya adalah

$$x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$$

Teorema 1 (konsep dualitas):

"Dual dari setiap teorema dalam sebuah aljabar Boolean B adalah juga sebuah teorema".

Bukti :

Dual dari himpunan dari aksioma B adalah sama dengan himpunan sal pada aksioma- aksioma. Oleh karena itu, jika setiap pernyataan adalah sebuah konsekuensi pada aksioma – aksioma dari sebuah aljabar Boolean, maka dualnya adalah juga sebuah konsekuensi dari aksioma- aksioma itu karena dual pernyataan dapat di buktikan dengan menggunakan dual dari setiap langkah pembuktian dari pernyatan asalnya.

Teorema 2

Diketahui Aljabar Boole $\langle$ B, $\wedge$, $\vee$, ‘, 0, 1 $\rangle$ dan x, y, x’, y’ $\in$B. maka berlakulah hukum – hukum ini :

1. Hukum Idempotem
   a. $x \vee x = x$
   b. $x \wedge x = x$
2. Hukum Ikatan
   a. $x \vee 1 = 1$
   b. $x \wedge 0 = 0$
3. Hukum Absorbsi
   a. $(x \wedge y) \vee x = x$
   b. $(x \vee y) \wedge x = x$
4. Hukum De Morgan
   a. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
   b. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

III. Fungsi Boolean

Misal B = $\langle$ B, $\wedge$, $\vee$, ‘, 0, 1 $\rangle$ adalah aljabar boole. Suatu fungsi boole n variable adalah fungsi f : $B^n \rightarrow$ B. fungsi boolen disebut sederhana jika B = {0, 1}. Jadi f : $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Masukannya adalah $\{0, 1\}^n$ dan keluaran fungsi adalah {0, 1}. Operasi Not, And (dan), Or (atau) dalam logika dap[at dipandang sebagai fungsi Boolean dari $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$.

Fungsi Not : $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai

$$Not\ (x) = \begin{cases} 0 \text{ jika } x = 1 \\ 1 \text{ jika } x = 0 \end{cases}$$

Fungsi ini biasanya ditulis $\neg(x)$

Fungsi And : $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai :

$$And\ (x, y) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x = y = 1 \\ 0 \text{ jika } x \text{ dan } y \text{ yanglain} \end{cases}$$

Fungsi Or : $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai :

$$Or\ (x, y) = \begin{cases} 0 \text{ jika } x = y = 0 \\ 1 \text{ jika } x \text{ dan } y \text{ yanglain} \end{cases}$$

OR- eksklusif dai $x_1 \oplus x_2$ didefinisikan oleh tabel 1 berikut ini:

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Sebuah table logika, engan satu keluaran, adlah sbuah fungs. Domainnya adalah himpunan masukan dan daerah hasilnya adalah himpunan keluaran. Untuk fungsi OR-eksklusif yang diberikan dalam tabel 1, domainnya adalah himpunan { (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)} dan daerah hasilnya adalah himpunan $Z_2 = \{0, 1\}$.

$x_1 \oplus x_2$ berharga 0 jika $x_1 = x_2$ dan berharga 1 jika $x_1 \neq x_2$.

Jika XOR dinyaakan sebagai fungsi $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$, maka :

XOR : $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai

$$XOR\ (x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \text{ jika } x_1 = x_2 \\ 1 \text{ jika } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Misalkan $X(x_1, \ldots, x_n)$ adalah sebuah ekspresi boole. Fungsi f yang berbentuk $f(x_1, \ldots, x_n) = X(x_1, \ldots, x_n)$ disebut fungsi Boole.

Contoh 3 :

Fungsi f : $Z_2^3 \rightarrow Z_2$ yang didefinisikan oleh $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ adalah fungsi Boole. Masukan dan keluarannya diberikan pada table berikut:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

IV. Ekspresi Boole

Ekspresi Boole dalam n buah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan secara recursif sebgai berikut :

1. 0 dan 1 adalah ekspresi boole
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing – masing adalah ekspresi boole.
3. jika E dan E adalah ekspresi Boole , maka $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$ dalah ekspresi boole juga.

Contoh 4 :

Apakah ekspresi di bawah ini merupakan ekspresi Boole dalam variabel x, y, z ?

a. z
b. $x \vee y$
c. $(x \wedge y)' \vee (z' \wedge x)$
d. $(x \vee y) \wedge (x' \vee z) \wedge 1$

Penyelesaian :

a. menurut defenisi (2), jelasd bahw z sendiri merupakan ekspresi Boole.
b. Menurut definisi (2), x dan y merupakan ekspresi Boole. Karena x dan y masing – masing merupakan ekspresi Boole, maka menurut (3), $x \vee y$ juga merupakan ekspresi Boole.
c. x dan y merupakan ekspresi Boole (definisi 2). Maka $(x \wedge y)$ merupakan ekspresi Boole (definisi 3), sehingga $z' \wedge x$ merupakan ekspresi Bool (definisi 3)
d. Karena $(x \wedge y)'$ dan $(z' \wedge x)$ masing-masing ekspresi Boole maka $(x \wedge y)' \vee (z' \wedge x)$merupakan ekspresi Boole juga.

Dalam praktek, pnulisan tanda $\wedge$ kadang – kadang merepotkan dan membingungkan sehingga biasanya ekspresi boole ditulis dengan mengganti $\wedge$ dengan tanda (.) atau dihilangkan sama sekali. Dengan notasi ini maka contoh 4 (c) dan (d) masing – masing berbentuk $(xy)' \vee (z'x)$ dan $(x \vee y)\,(x' \vee z)\,1$.

Dua ekspresi Boole E_1 dan E_2 dikatakan ekuivalen (symbol $E_1 = E_2$) jika untuk semua kombinasi masukan, kedua ekspresi tersebu menghasilkan nilai fungsi keluaran yang sama. Dengan kata lain, salah satu ekspresi bisa didapatan dari yang lain dengan menggunakan hukum – hukum dalam aljabar boole.

V. Bentuk Normal Disjungtif (Disjungtive Normal Form = DNF)

Ekspresi Boole yang hanya terdiri dari satu variable (atau komplemennya) disebut Literal. Setengah dari nilai fungsi ekspresi yang berbentuk Literal akan bernilai 1 dan setengah yang lainbernilai 0.

Contoh 5 :

Buatlah table masukan/keluaran fungsi literal $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ yang didefinisikan sebagai $f(x, y) = y'$

Penyelesaian :

x	y	y’
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Dari table tampak bahwa setengah dari nilai fungsi (2 buah) berharga = 1 dan setengah yang lain berharga =0.

Ekspresi Boole n variabel $x_1, \ldots, x_n$ yang merupakan gabungan dari beberapa Literal yang dihubungkan dengan “ $\wedge$ ” disebut minterm. Jadi minterm berbentuk :

$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ dengan a_i berharga 0 atau 1

x_i^0 adalah x_i dan $x_i^2 = x_i'$

Contoh 6 :

Tentukan apakah ekpresi – ekspresi dibawah ini merupakanminterm dalam 3 variabel x, y, z

a. xy’z’
b. xz’
c. xyx’z

Penyelesaian :

a. Merupakam minterm dalam x, y, z karena memuatliteral x, y, z.
b. Bukan minterm dalam x, y,z karena tidak memuat literal y. Perhatikan bahwa xz’ merupakan minterm dalam variabel x dan z.
c. Bukan minterm karena x muncul 2 kali.

Teorema 4

Jika f : $Z_2^n \rightarrow Z_2$, maka f merupakan fungsi Boole, jika f tidaksama dengan 0, misalkan $A_1,\ldots.A_k$ menyatakan unsure-unsur A_i dari Z_2^n dengan $f(A_i) = 1$. untuk n setiap $A_i = (a_1,\ldots,a_n)$. ambil $m_i = y_1 \wedge \ldots y_n$, dengan

$$y_i = \begin{cases} x_j & \text{jika } a_j = 1 \\ \overline{x_i} & \text{jika } a_i = 0 \end{cases}$$

Maka $f(x_1,\ldots,x_n) = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$

Contoh 7 :

Buatlah table untuk ekspresi Boole E dalam 3 variabel x, y, z

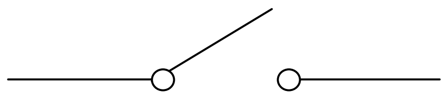
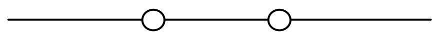
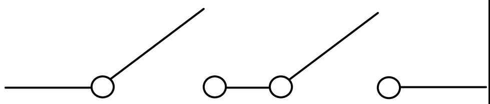
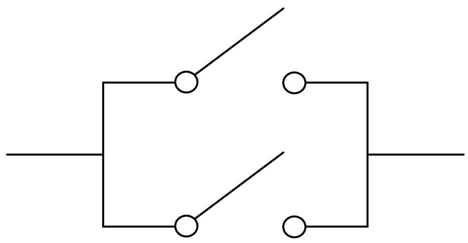
E = x'yz' $\vee$ xy'z' $\vee$ xy'z $\vee$ xyz'

Penyelesaian:

x	y	z	x'yz'	xy'z'	xy'z	xyz'	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

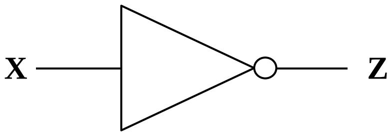
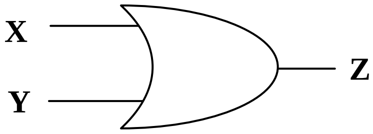
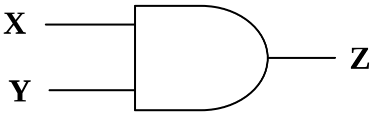
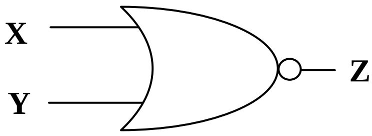
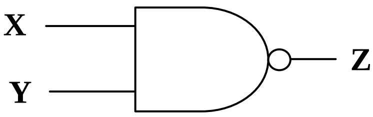
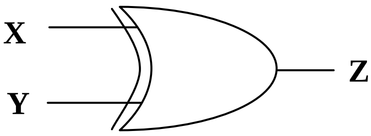
VI. Rangkaian Logika

Selain sebagai sutu struktur baljabar, aljabar Boole juga sangat tepat untuk diaplikasikan dalam rangkaian listrik. Analogi antara struktur aljabar dan rangkaian listrik dapat dilihat dalam tabel 2 berikut ini :

Jenis	Gambar	Keterangan
Saklar Terbuka		0
Saklar Tertutup		1
Rangkaian Seri		$p \wedge q \ (= pq)$
Rangkaian Paralel		$p \vee q$

Kombinasi signal – signal berbentuk bit – bit dapat diteruskan ke komponen – komponen lain dengan berbagai macam rangkaian. Karena adanya bermacam – macam teknologi yang digunakan dalam pembuatan rangkaian, para ahli epakat untuk menganggap rangkaian – rangkaian sebagai koak hitam (black box) . isi kotak hitam adalah implementasi rangkaian secara rinci. Isi kotak tersebut sering di abaikan dan perhatian lebih ditujikan pada relasiyang ada antara signal masukan/keluaran.

Rangkaian yang rumit dapat di susun dari unit – unit kecil yang disebut gerbang (gaes). Suatu gerbang tertentu bersesuaian dengan suatu fungsi aljabar boole sederhana. Ada beberapa gerbang dasar yang banyak dipakai. Gerbang – gerbang tersebut tampak pada tabel 3. perjanjian dalam penggambaran adalah sebagai berikut : garis yang ada di kiri symbol adalah masukan, dan yang ada di kanan symbol adalah garis keluaran. Table masukan /keluaran ke-6 gerbang table 3 tampak pada table 4.

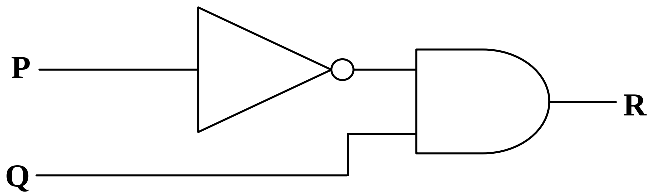
Nama Gerbang	Simbol	Ekuivalensi Dalam Aljabar Boole
NOT		$z = x'$
OR		$z = x \vee y$
AND		$z = xy$
NOR		$z = (x \vee y)'$ (Not OR)
NAND		$z = (xy)'$ (Not AND)
XOR		$z = x \oplus y$

		NOT	OR	AND	NOR	NAND	XOR
x	y	x’	$x \vee y$	$x \wedge y$	$(x \vee y)$’	$(x \wedge y)$’	$x \oplus y$
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Contoh 8 :

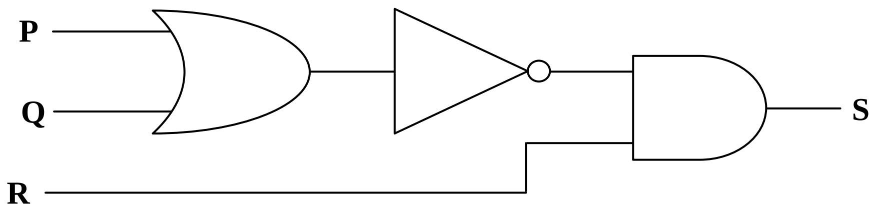
Tentukan keluaran darirangkaian pada gambar 8.a – 8.b dibawah ini untuk masukan – masukanm yang diberikan.

a.



Masukan : P = 0; Q = 1

b.



Masukan : P =1 ; Q = 0 ; R = 1

Penyelesaan :

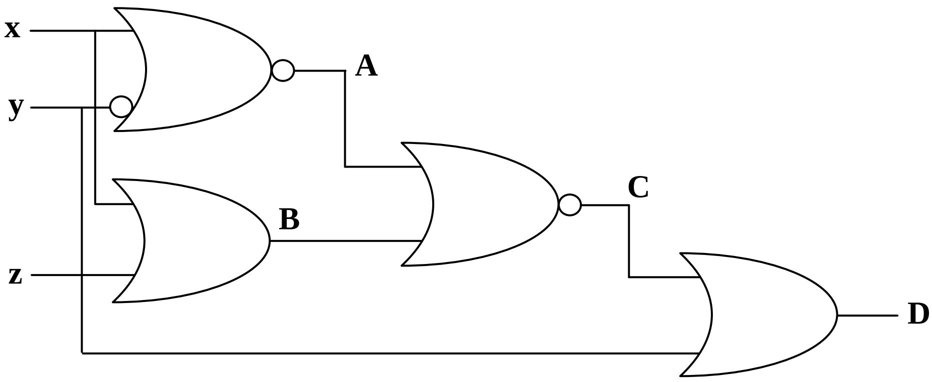
a. Gerbang NOT mengubah masukan P= 0 menjadi P = 1. selanjutnya gerbang AND akan mendapat masukan P = 1 dan Q = 1 sehinga R = 1.
b. Gerbang OR untuk masukan P = 1 dan Q = 0 menghasilkan keluaran = 1 tersebut menjai = 0. akhirnya, keluaran gerbang NOT (= 0) bersama – sama

dengan masukan R dimasukkan ke gerbang AND dan menghasilkan keluaran = 0.

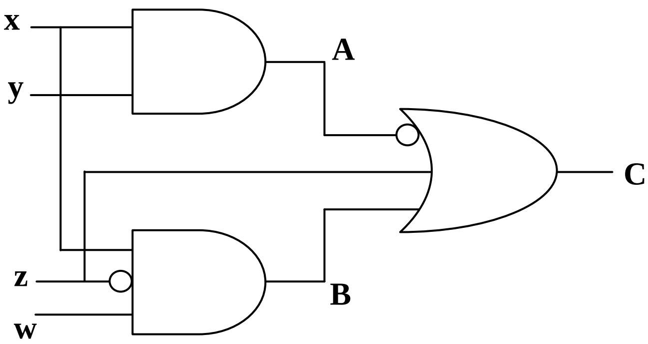
Contoh 9 :

Carilah ekspresi Boole untuk rangkaian gambar 9.a dan 9.b berikut ini :

a.



b.



Penyelesaian :

a. Gerbang A menghailkan keluaran $(x \vee y')'$

Gerbang B menghailkan keluaran $x \vee z$

Gerbang C menghailkan keluaran $((x \vee y')' \vee (x \vee z))'$

Gerbang D menghailkan keluaran $((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y$

Ekspresi Boole yang sesuai adalah $((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y$

b. Gerbang A memberikan keluaran xy

Gerbang B memberikan keluaran xz'w

Gerbang C memberikan keluaran (xy)' $\vee$ z $\vee$ (xz'w).

Ekspresi Boole yang sesuai adalah (xy)' $\vee$ z $\vee$ (xz'w).

VII. Pasangan-pasangan Berurut Bagian (Partial Order)

Dalam sebuah Aljabar Boole B,didefinisikan sebuah relasi binary $\subseteq$ pada B yang menetapkan bahwa:$x \subseteq y$ jika dan hanya jika $x \wedge y = x$.

Teorema 6

$x \subseteq y$ jika dan hanya jika $x \wedge y = x$ dan $x \vee y = y$.

Bukti

Anggaplah $x \subseteq y$ maka $x \vee y = (x \wedge y)\ y = y$.

Jika $x \vee y = y$ maka $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Contoh 10:

Dalam sebuah Aljabar Boole P(A) relasi $x \subseteq y$ adalah sama dengan $x \leq y$,untuk setiap subset-subset x dan y dari A dikatakan betul-betul dibawah operasi $\wedge,\vee,'$,jika objek- objek $x \wedge y$,$x \vee y$,dan x' juga berada di A.

Teorema 7

1.$x \subseteq y$ (hukum reflesif).

2.($x \subseteq y$ dan $y \subseteq z$) maka $x \subseteq z$ (hukum transitif).

3.($x \subseteq y$ dan $y \subseteq x$) maka $x = y$ (hukum anti simetri).

Bukti:

1. $x \wedge y = x$.

2. Anggaplah $x \wedge y = x$ dan $y \wedge z = y$ maka $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$

$$= x \wedge (y \wedge z)$$

$$= x \wedge y$$

$$= x$$

3. Anggapan $x \wedge y = x$ dan $y \wedge x = y$ maka $x = x \wedge y$

$$= y \wedge x$$

$$= y$$

Secara keselurruhan sebuah relasi binary R pada sebuah himpunan A adalah setiap subset dari A X A,artinya setiap himpunan dari pasangan-pasangan berurut (u,v) sedemikian rupa sehingga $u \in A$ dan $v \in A$.Daripada menulis $(x,y) \in R$ maka lebih sering ditulis x R y.

Sebuah pasangan-pasangan berurut bagian (partial order) pada sebuah himpunan A adalah sebuah relasi binary R pada sebuah himpunan A yang memuaskan analog-analog dari teori sebelumnya:

a. (x R y dan y R z) maka x R z.

b. (x R y dan y R x) maka x = y.

Partial order seperti ini disebut poset (partially ordered set).

Misalkan $\subseteq$ adalah sebuah partial order pada sebuah himpunan A.Sebuah elemen z dari A disebut menjadi sebuah batas atas dari sebuah subset $y \subset A$ jika $y \subseteq z$ untuk seluruh y dalam Y.Sebuah elemen z dari A disebut menjadi sebuah batas atas paling kecil (L U B=lower upper bound) darri sebuah subset $y \subset A$ jika dan hanya jika:

1. z adalah sebuah batas atas dari y.
2. $z \subseteq w$ untuk setip batas atas w dari y.

Jadi,pastikan sebuah subset y dari A mempunyai paling tidak sebuah batas atas paling kecil (L U B).

Dengan demikian,sebuah elemen z dari himpunan A disebut menjadi sebuah batas bawah dari sebuah subset $y \subset A$ jika dan hanya jika $z \subseteq y$ untuk setiap y dalam Y maka z disebut sebuah batas bawah terbesar (G L B = greatest lower bound) dari y jika dan hanya jika:

3. z adalah batas bawah dari y.
4. $w \subseteq z$ untuk setiap batas bawah w dari y.

Jadi,pastilah sebuah subset y dari A mempunyai paling tidak sebuah batas bawah terbesar (G L B).

Sebuah partial order $\subseteq$ yang didefinisikan oleh sebuah Aljabar Boole B mempunyai sebuah persyaratan khusus (L) yang tidak dimiliki oleh seluruh partial order.

Teorema 8:

Persyaratan khusus itu adalah untuk x dan y, (x,y) mempunyai baik sebuah L U B (yaitu $x \vee y$) dan sebuah G L B (yaitu $x \wedge y$).

Bukti:

$x \subseteq x \vee y$, karena $x \wedge (x \vee y)=x$.

$y \subseteq x \vee y$.

Jadi,$x \vee y$ adalah batas atas dari {x,y}.

Anggaplah sekarang w adalah sebarang batas dari (x,y),artinya $x \subseteq w$ dan $y \subseteq w$, $x \wedge w = x$ dan $y \wedge w = y$.

Maka:$(x \vee y) \wedge w = (x \wedge w) \vee (y \wedge w)$

$= x \vee y$

$= x \vee y \subseteq w$

Jadi,$x \vee y$ adalah batas bawah paling kecil (L U B) dari {x,y}.

VIII. Lattices

Sebuah lattices adalah sebuah pasangan berurut (L, $\subseteq$) yang berisi sebuah himpunan tidak kosong L bersama dengan partial order reflexive $\subseteq$ pada L yang memuaskan persyaraan sebagai berikut :

Untuk setiap x dan y dalam L, himpunan {x, y} mempunyai baik batas atas paling kecil (L U B) maupun batas bawah (G L B).

Sebuah partial order pada sebuah himpunan A dikatakan menjadi reflexif jika dan hanya jika x R x berlaku untuk seluruh x dalam A, semenara itu R dikatakan menjadi irreflexif dalam A jika dan hanya jika x R x salah untuk semua x dalam A.

Teorema 9 :

Untuk setiap elemen – elemen x, y, z dari sebuah lattice (L, $\subseteq$):

a. $x \wedge x =$ dan $x \vee x = x$ (idempoten).

b. $x \wedge y = y \wedge x$ dan $x \vee y = y \vee x$. (commutaif)

c. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ dan $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (asosiatif).

d. $x \wedge (x \vee y) = x$ dan $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbsi)

e. $x \subseteq y \leftrightarrow x \wedge y = x$ dan $x \subseteq y \leftrightarrow x \vee y = y$.

f. $x \subseteq y \rightarrow (x \wedge z \subseteq y \wedge z$ dan $x \vee z \subseteq y \vee z)$

Dengan sebuah unit 1 dai sebuah lattices $(L, \subseteq)$ diartikan sebagai sebuah batas atas dari keseluruhan himpunan L. jadi, jelaslah bahwa jika sebuah unit ada maka lattices itu unik, sedangkan sebuah batas bawah dari L dan dengan demikian lattices itu juga unik jika sebuah zero ada.

Jelaslah :

$0 \wedge x = 0$ dan $0 \vee x = x$

$x \vee 1 = 1$ dan $x \wedge 1 = x$ untuk seluruh x dalam lattices.

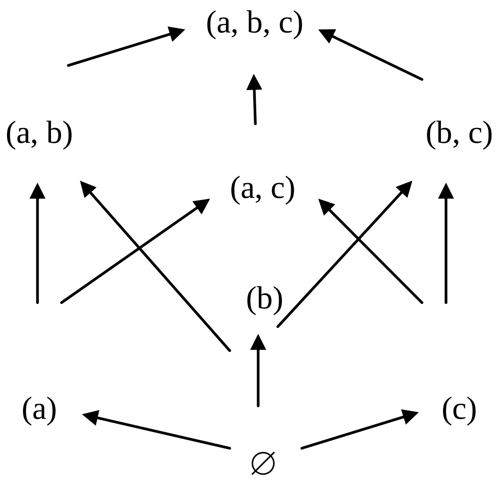
Lattices dengan keerbatasn 0 dan 1ini disebut lattices terbatas.

Jadi, setiap Lattices $(L, \subseteq)$ adalah terbatas.

Contoh 11 :

1. Lattices yang ditentukan oleh sebuah aljabar Boole $\langle$ B, $\wedge_B$, $\vee_B$, ‘B, 0_B, 1_B $\rangle$ maka 1_B adalah sebuah unit dari lattices itu dari latties itu dan 0_B adalah zero dari lattices itu.
2. Jika A = {a, b, c} maka sub-subhimpunan A = {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a},{b}, {c}, $\varnothing$ dan himpuan A sndiri membentuk diagram sebuah Lattices L $(L, \subseteq)$.

Diagramnya.



Sebuah lattices dikatakan menjadibersifat distributive jika dan hanya jika lattices itu memuaskan 2 ketentuan sebagai berikut :

1. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$.
2. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

jika tidak memenuhi syarat di atas maka lattices itu tidak distribuif.

SOAL – SOAL LATIHAN

1. Jika U adalah himpunan semesta dan S = P (U), himpunan kuasa dari U, maka $(S, \cup, \cap, \bar{\ }, \varnothing, U)$ adalah suatu aljabar Boole. Nyatakan hokum ikatan da absorbsi untuk aljabar Boole ini.
2. Buktikan bahwa dalam sembarang aljabar Boole, (x (x + y . 0))' = x', untuk semua x dan y dan tuliskan dualnya.
3. diketahui ekspresi Boole dalam 3 variabel x, y, z : E = x $\vee$ yz. Buatlah table fungsi Boole dalam x, y, z.
4. tentukan mana diantara ekspresi- ekspresi dibawah ini yang merupaka ekspresi boole dalam x, y, z
   a. 1
   b. xy $\vee$ xz $\vee$ yz
   c. xyz' $\vee$ x'yz $\vee$xy'z
5. a. tuliskan minterm yang mungkin di bentuk oleh 2 variabel x_1 dan x_2.
   b. Berapa banyak minterm yang dapat dibentuk dari n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$
6. Fungsi XOR dapat dinyatakan dalam DNF sebagai $x_1 \oplus x_2 = x_1x_2' \oplus x_1' x_2$
   Ubahlah ekspresi yang melibatkan fungsi XOR di bawah ini kedaam bentuk DNF !
   $E = (x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1 \oplus x_2)$
7. Buatlah rangkaian yang akan menghasilkan keluaran = 1 bila dan hanya bila :
   a. Tepat satu di antaramasukan x, y, z berharga = 1.
   b. Paling sedikit 2 diantara masukan x, y, z, w berhraga = 1
   c. x dan y berharga sama serta y dan zberlawanan arah (masukan x, y, z)
8. Buatlah rangkaian dengan masukan p, q, r dan mempunyai keluaran = 0 bila dan hanya bila tepa 2 diantara p, q, dan r mempunyai harga yang sama .
9. pada masing – masing diagram di bawahin, sebuah partial order $\subseteq$ darisebuah himpunan A diperlihatkan.

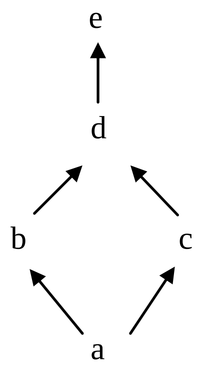
Tentukan yang dimana :

a. sebuah Lattices (A, $\subseteq$)?

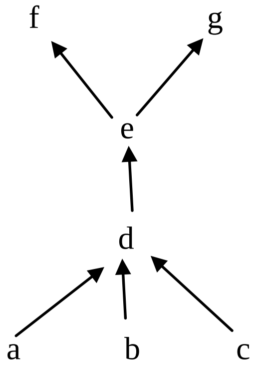
b. Sebuah distributive lettices ?

c. Complemented Lattices?

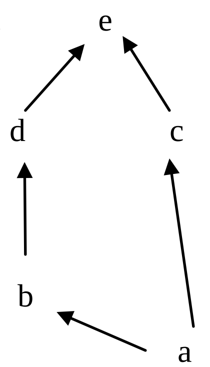
a.



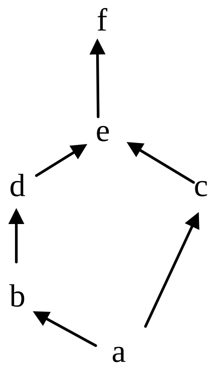
b.



c.



d.



10. Bukikan bahwa lattice – lattices dapat dikarakteristikkan oleh 6 hukum :

a. $x \wedge y = y \wedge x$

b. $x \vee y = y \vee x$

a dan b adalah hukum – hukum komutatif.

c. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

d. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

c dan d adalah hukum – hukum asosiatif

e. $x \wedge (x \vee y) = x$

f. $x \vee (x \wedge y) = x$

e dan f adalah hukum – hukum absorbsi

DAFTAR PUSTAKA

Clark,Frank J.1984.*Matematika untuk Pemprosesan Data*.Bandung:Erlangga.

Johnsonbaugh,Richard.2002.*Matematika Diskrit (Discrete Mathematics Fourth Edition)*.Jakarta:PT Prenhallindo.

Lipschilz,Seymour dan Marc Lars Lipson.2001.*Matematika Diskrit*. Jakarta:Salemba Teknika.

Rasyad,Rasdihan.2003.*Logika Aljabar*.Jakarta:PT Grasindo.

Siang,Jong Jek.2002.*Matematika Diskrit dan aplikasinya pada ilmu komputer*.Jogjakarta:PT Andi.